ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ BÌNH

ĐỊNH LÝ HAYMAN ĐỐI VỚI HÀM HỮU TỶ TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ BÌNH

ĐỊNH LÝ HAYMAN ĐỐI VỚI HÀM HỮU TỶ TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên - 2015

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại khoa sau đại học, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Tiến sĩ Vũ Hoài An, người đã tận tình chỉ bảo cho tôi thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của Trường Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Thị Bình

Mục lục

Bảng ký hiệu

f	Hàm hữu tỷ
$n(f, a)$	Hàm đếm của f tại điểm a
$T(f)$	Hàm độ cao của f
$\mathbb{K}$	Trường đóng đại số, đặc số không
$\mathbb{R}$	Trường số thực

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Năm 1967, Hayman đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman: Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hàm hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie kiểm tra đối với $n = 1$. Các kết quả này (thường được gọi là Định lý Hayman) và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu là vấn đề nhận giá trị của đa thức vi phân mà trường hợp riêng là vấn đề nhận giá trị của hàm và đạo hàm của nó.

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C. Yang - X.H. Hua. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây.

Định lý A. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geqslant 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị aCM thì hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $g(z) = c_1.e^{cz}$ và $f(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -a^2$.

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han - H.X. Yi, W. Bergweiler, J.K. Langley, K. Liu, L.Z. Yang, L.C. Hong, M.L. Fang, B.Q. Li, P.C. Hu - C.C. Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua - R. Vaillancourt... Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu định lý chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với các ước lượng giữa các hàm đặc trưng, hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp p-adic, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda. Năm 2008, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau.

Định lý B. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $n \geqslant 2$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}_p - \{0\}$. Khi đó $f^n(z)f'(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$ thì f là hằng.

Gần đây, Ha Huy Khoai and Vu Hoai An [4], Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai [5] đã thiết lập các kết quả tương tự cho hàm phân hình p-adic, đạo hàm, toán tử sai phân, đa thức sai phân của nó.

Theo hướng nghiên cứu này, đề tài nhằm nghiên cứu vấn đề: **Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không và ứng dụng.**

2. Mục tiêu nghiên cứu

Tổng hợp, trình bày lại các bài giảng về Giả thuyết Hayman cho hàm hữu tỷ và đạo hàm của nó trên trường đóng đại số, đặc số không [1].

Đưa ra các ví dụ trong toán học phổ thông để kiểm tra Giả thuyết Hayman đối với hàm số thực, đạo hàm và sai phân của nó trên trường số thực $\mathbb{R}$.

3. Nội dung nghiên cứu

- Luận văn tìm hiểu tổng quan về Giả thuyết Hayman.
- Luận văn tìm hiểu, tổng hợp và trình bày vấn đề nhận giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.

4. Kết quả nghiên cứu

- Tổng hợp và trình bày lại các định lý chính đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.
- Tổng hợp và trình bày lại các kết quả về vấn đề nhận giá trị của $f^n(f^{(k)})^m$, $(f^n)^{(k)}$, (Định lý 1.2.2, Định lý 1.2.6, Định lý 1.2.11).
  Nội dung của hai vấn đề trên được trình bày ở Chương 1.
- Tổng hợp và trình bày 35 ví dụ để kiểm tra Giả thuyết Hayman đối với hàm số thực trong toán học phổ thông. Nội dung của vấn đề này được trình bày ở Chương 2.

5. Bố cục luận văn

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận văn gồm 2 chương.

Chương 1: Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.

Trong Chương 1, tôi tổng hợp và trình bày lại các bài giảng về Giả thuyết Hayman cho hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không và đạo hàm của nó. Các kết quả này ở trong [1] (Định lý 1.2.2, Định lý 1.2.6, Định lý 1.2.11).

Chương 2: Giả thuyết Hayman đối với toán học trung học phổ thông.

Trong Chương 2, tôi đưa ra 35 ví dụ trong toán học phổ thông để kiểm tra Giả thuyết Hayman đối với hàm số thực, đạo hàm và sai phân của nó trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Chương 1

Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không

Trong Chương 1, tôi trình bày lại các vấn đề nhận giá trị của $f^n(f^{(k)})^m$, $(f^n)^{(k)}$, ở đó f là hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không $\mathbb{K}$; n, m, k là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện nào đó. Vấn đề nhận giá trị nói ở đây là:

Tìm mối quan hệ của n, m, k để $f^n(f^{(k)})^m$ hoặc $(f^n)^{(k)}$ nhận giá trị a, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. Ý nghĩa của vấn đề này nằm ở chỗ: Xét ảnh hưởng của đạo hàm đối với hàm đã cho. Khi vấn đề này được xét với hàm số thực, ta có sự liên hệ giữa Giả thuyết Hayman với toán trung học phổ thông. Kết quả của vấn đề này suy ra được các kết quả: Với điều kiện nào đó của m, n, k thì f là hằng. Các định lý kiểu như vậy được gọi là Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ trên $\mathbb{K}$.

Trong Chương 1, Định lý 1.2.2 là Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ và đạo hàm bậc nhất của nó; Định lý 1.2.6 là Định lý Hayman đối với hàm hữu tỷ và đạo hàm bậc cao của nó; Định lý 1.2.11 là Định lý Hayman đối với đạo hàm bậc cao.

Trước tiên, tôi nhắc lại khái niệm trường đóng đại số, đặc số không và hàm hữu tỷ trên đó [3].

1.1 Hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không

Định nghĩa 1.1.1.
Một trường $\mathbb{K}$ được gọi là đóng đại số nếu mọi đa thức một ẩn có bậc khác không, với hệ số trong $\mathbb{K}$, có nghiệm trong $\mathbb{K}$.
Ví dụ 1.1.2.
1. Trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $A(x) = x^2 - 2$ có các hệ số thuộc $\mathbb{Q}$ nhưng không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$.
2. Trường số thực $\mathbb{R}$ không là đóng đại số vì đa thức $P(x) = x^2 + 5$ có các hệ số thuộc $\mathbb{R}$ nhưng không có nghiệm trong $\mathbb{R}$.
Định nghĩa 1.1.3. Cho $\mathbb{K}$ là một trường.
1. Số tự nhiên n nhỏ nhất khác không sao cho $n.1 = 0$ thì số n được gọi là đặc số của trường $\mathbb{K}$. Ký hiệu char($\mathbb{K}$).
2. Với mọi số tự nhiên $n \neq 0$ mà $n.1 \neq 0$ thì khi đó ta nói trường $\mathbb{K}$ có đặc số là 0.
Ví dụ 1.1.4.
1. Trường $\mathbb{Q}$ có đặc số không. Vì $n1 \neq 0$ với mọi $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Trường $\mathbb{Z}_5$ có đặc số 5.

Thật vậy, ta có $5.\overline{1} = 0$ và $n\overline{1} \neq 0$ với $1 \leqslant n \leqslant 4$. Do đó $\mathbb{Z}_5$ có đặc số là 5.
Ký hiệu $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không.
Gọi f là đa thức khác hằng có bậc n trên $\mathbb{K}$ và a là không điểm của f. Khi đó

$$f = (z - a)^m p(z)$$

với $p(a) \neq 0$ và m là bội của không điểm a của f.
Đặt $\mu_f^0(a) = m$. Ký hiệu $\mathrm{n}(f)$ là số các không điểm của f kể cả bội, $d \in \mathbb{K}$ và l là số nguyên dương. Ta định nghĩa:

$$\mathrm{n}(f, d) = \mathrm{n}(f - d),$$

$$\mathrm{n}_l(f) = \sum_{i=1}^{q} \min\{m_i, l\} \text{ ở đó } f = a(f - z_1)^{m_1} \dots (f - z_q)^{m_q},$$

$$\mathrm{n}_l(f, d) = \mathrm{n}_l(f - d),$$